
Compte rendu

Rédaction :
Esteban Montealegre

Sous la direction de :
Pr. Jason Lotay

Dans le cadre d'un stage de M1 effectué au

Mathematical Institute of Oxford
Geometry departement

ACKNOWLEDGMENTS. I would like to warmly thank J.Lotay for his help, kindness, and attentiveness throughout these four months. I hope that my efforts have lived up to the trust he placed in me. His attention to ensuring that this internship ran smoothly allowed me to get the most out of the scientific content. Finally, the great freedom with which I was able to advance my work meant that I never grew tired of the topics I was working on. I would also like to say a word to his doctoral students, in particular T. Langlais, with whom I was able to share much more than just the main points of my subject of study. I hope that these rich exchanges will guide me in the years to come.

Version arrêtée au 15 août 2025

PRÉSENTATION

Ce stage de M1 a été effectué au Mathematical Institute of Oxford, sous la supervision de J.Lotay, entre le mois d'avril et août. Aucun bureau n'étant libre dans le bâtiment principal, j'ai largement exploité la bibliothèque de la Maison Française d'Oxford (à 5 min à pied), qui m'a gentiment accordé un accès de résident. Si j'y passais la majorité du temps, la semaine était ponctuée de visites à l'institut : le lundi matin l'équipe des doctorants et J.Lotay se réunissait pour un café informel, l'après-midi avaient lieu les séminaires de géométrie, les jeudis matins étaient occupés par un groupe de lecture sur les variétés Einstein, suivis d'un déjeuner entre doctorants et à intervalles réguliers d'environ 1 semaine (dépendant de l'avancement du travail), un rendez-vous régulier en tête à tête avec J.Lotay. Ces derniers duraient de 1 à 2 heures en général, et prenaient tantôt la forme d'un entretien informel, tantôt d'un exposé au tableau, suivi d'une discussion. Ajoutant à cela les discussions plus ou moins formelles avec un doctorant, T.Langlais (à présent docteur), cette situation « à l'écart » des bureaux me permettait à la fois de jouir d'une autonomie totale sans jamais faire naître un sentiment d'isolement. En résumé, les conditions d'accueil et de travail durant ce stage ont parfaitement correspondu à mes attentes. Je remercie chaleureusement les quelques personnes qui m'y ont accueilli, et particulièrement J.Lotay et T.Langlais.

Le but initial du stage était de découvrir les théories de jauge en mathématiques, et de compléter ma formation théorique en travaillant sur un sujet et une théorie plus avancée que ce que l'on peut retrouver dans un cours général. Le principal objectif était de découvrir la théorie de Donaldson, en lisant le livre de Donaldson et Kronheimer ([DK90]). Les premières semaines ont essentiellement été des « mises à niveau » de géométrie et de topologie (en particulier, il fallait apprendre la cohomologie, la géométrie riemannienne et les fibrés principaux). Puis j'ai été en mesure de faire mes premiers exposés (sur les classes caractéristiques, la transversalité...) en parallèle de ma lecture de l'ouvrage de référence. Rapidement j'ai souhaité apprendre conjointement la théorie de Seiberg-Witten, et mener l'étude des deux théories de front (se sont alors ajoutées d'autres présentations, sur les structures Spin, les opérateurs de Dirac, la théorie de Fredholm et le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer). C'est cette partie du stage qui a été retenue dans ce compte rendu (on y suit principalement le sixième chapitre de [Tel12]). Courant juin, nous avons décidé de basculer vers un autre domaine de la géométrie pour conclure le stage. J'ai alors successivement présenté la théorie de Morse (découverte pour l'occasion), puis la théorie de Floer, en suivant l'exposé d'Audin et Damian ([AM10]). À la fin du stage, J.Lotay m'a proposé de lire un article de Floer ([Flo88]) — l'occasion pour moi de me pencher pour la première fois sur une lecture d'article de revue.

THÉORÈME DE DONALDSON SUR LA FORME D'INTERSECTION D'UNE 4-VARIÉTÉ

RÉSUMÉ. Dans ce compte rendu, notre objectif est de décrire les grandes étapes de la preuve du théorème de Donaldson sur la forme d'intersection des 4-variétés. Ce dernier permet, avec le concours de la classification (due à Freedman) des 4-variétés topologiques compactes orientées simplement connexes, d'obtenir un résultat surprenant : il existe des 4-variétés topologiques n'admettant aucun atlas différentiable. La théorie que nous développerons pour démontrer ce résultat permet même d'établir des invariants du type de difféomorphisme des variétés, qui ne sont pas des invariants du type d'homéomorphisme desdites variétés. Pour construire de tels invariants, il faudra se placer sur un nouvel espace construit à partir de la 4-variété, à savoir son espace des modules. Nous avons choisi de décrire l'espace des modules dans le cadre de la théorie de Seiberg-Witten, plus facile à mettre en œuvre que celui de la présentation historique de Donaldson.

1 Énoncé du théorème	2
2 Préparatifs divers	3
2.1 Fibrés principaux et associés	3
2.2 Structures spinorielles et opérateur de Dirac	6
3 La théorie de Seiberg-Witten	8
3.1 Équations de Seiberg-Witten et espaces de modules	8
3.2 Compacité de l'espace des modules	9
3.3 Complétion au sens de Sobolev	10
3.4 Le complexe de déformation	12
3.5 Modèles locaux	12
3.6 Topologie de $\mathcal{B}^*$	14
4 Démonstration du théorème	15

1 ÉNONCÉ DU THÉORÈME

On fixe dans toute la suite une 4-variété compacte connexe orientée M . Par dualité de Poincaré, le cup-produit induit une forme bilinéaire symétrique et unimodulaire

$$q_M : H^2(M, \mathbb{Z})/\text{Tors} \times H^2(M, \mathbb{Z})/\text{Tors} \rightarrow \mathbb{Z}$$

(où Tors désigne le module de torsion de la cohomologie). Le type d'isomorphisme d'une telle forme quadratique constitue un invariant important pour l'étude des 4-variétés.

Soit H un $\mathbb{Z}$ -module. Une forme quadratique $q : H \times H \rightarrow \mathbb{Z}$ induit deux nouvelles formes sur $H \otimes \mathbb{R}$ et $H \otimes \mathbb{Z}_2$. Le rang $\text{rg}(q)$ (*resp.* la signature $\sigma(q)$) de la forme q est le rang (*resp.* la signature) de la forme réelle correspondante. La parité de q est celle de la forme correspondante sur $\mathbb{Z}_2$ (*i.e.* q est paire si elle induit la forme nulle sur $\mathbb{Z}_2$).

Définition 1.1 (*Vecteur caractéristique*). — Soit $q : H \times H \rightarrow \mathbb{Z}$ une forme quadratique

bilinéaire symétrique unimodulaire. Un élément $c \in H$ est dit caractéristique lorsque pour tout $x \in H$, on a $q(x, x) \equiv q(c, x) \pmod{2}$.

Remarque 1.2 . — Comme la forme induite sur $\mathbb{Z}_2$ est non dégénérée, il existe toujours un élément caractéristique. Par exemple la forme est paire si et seulement si le vecteur nul est caractéristique.

La classification des formes bilinéaires symétriques unimodulaires est un problème difficile en général. Le cas des formes non définies est en revanche très simple, puisque deux formes sont isomorphes lorsqu'elles ont même rang, signature et parité. En particulier les formes non définies impaires sont standards. En revanche il existe un très grand nombre de formes bilinéaires symétriques unimodulaires définies de même rang. Le critère suivant permet de caractériser les formes définies standards :

Théorème 1.3 (Elkies) . — Une forme quadratique q de rang b est bilinéaire symétrique unimodulaire définie vérifie toujours l'inégalité

$$|q(x, x)| \leq b, \quad x \in \text{Char}(q)$$

et le cas d'égalité a lieu si et seulement si la forme est standard.

Le théorème de Donaldson sur la forme d'intersection d'une 4-variété s'énonce alors ainsi :

Théorème 1.4 (Donaldson) . — Soit M une 4-variété compacte, orientée, connexe à forme d'intersection définie négative, alors sa forme d'intersection est standard.

Les travaux de Freedman sur les 4-variétés permettent d'obtenir toute forme quadratique bilinéaire symétrique unimodulaire (y compris non standards, et il en existe de telles) comme les formes d'intersection de variétés topologique. Nous démontrons donc que certaines variétés topologiques n'admettent pas de structure lisse.

2 PRÉPARATIFS DIVERS

Dans cette section, nous mettons en place le vocabulaire et les notions géométriques sur lesquels se fondent les théories de Donaldson et Seiberg-Witten. Ces derniers sont indispensables pour pouvoir définir les équations de Seiberg-Witten qui sont au cœur de la démonstration du Théorème 1.4 .

2.1 Fibrés principaux et associés

Définition 2.1 (Fibré principal) . — Soit M une variété lisse, et G un groupe de Lie. Un G -fibré principal sur M est une application $\pi : P \rightarrow M$, où P est une variété lisse munie d'une action libre de G à droite pour laquelle les orbites sont les fibres de π et telle que π est localement triviale, *i.e.* il existe en chaque point x de M un voisinage U_x et un difféomorphisme $\pi^{-1}(U_x) \simeq U_x \times G$ agissant comme π sur la première coordonnée, identifiant l'action de G et la multiplication à droite sur la seconde.

Remarque 2.2 . — La structure de fibré principal est bien plus riche que celle d'un simple espace fibré, car le groupe G (dit groupe structural) prescrit les changements de cartes.

Notons en effet (π, ϑ_x) le difféomorphisme $\pi^{-1}(U_x) \simeq U_x \times G$. La définition ci-dessus indique que $\vartheta_x(p \cdot g) = \vartheta_x(p)g$ pour $g \in G, p \in P$. Alors pour $y \in M$, l'application $\vartheta_x \circ \vartheta_y^{-1} : \pi^{-1}(U_x \cap U_y) \rightarrow G$ est G -équivariante, et permet donc de définir une application de transition $\varphi_{xy} : U_x \cap U_y \rightarrow G$ satisfaisant $\vartheta_x(p) = \vartheta_y(p) \cdot \varphi_{xy}(\pi(p))$. En particulier l'existence d'une section globale est équivalente à la trivialité du fibré.

Exemple 2.3 . — Le revêtement universel d'une variété M est un $\pi_1(M)$ -fibré principal (via l'action de monodromie). L'exemple prototypique de fibré principal est le fibré des repères sur un fibré vectoriel, qui possède naturellement une structure de $GL(n)$ -fibré principal. Si de plus les fibres sont équipées d'une structure euclidienne — par exemple au-dessus du fibré tangent d'une variété riemannienne, on peut alors réduire le groupe structural et former un $SO(n)$ -fibré principal.

Les fibrés principaux permettent de former de nouveaux espaces fibrés, dits associés :

Définition 2.4 (Fibré associé). — Soit $\pi : P \rightarrow M$ un G -fibré principal, F une variété différentielle sur laquelle G agit à gauche par α . Alors le fibré $\varpi : P \times_\alpha F \rightarrow M$ associé (π, α) est défini comme le fibré d'espace total

$$P \times F / (p, z) \sim (p \cdot g^{-1}, g \cdot z)$$

et la projection $\varpi([p, z]) = \pi(p)$.

Remarque 2.5 . — La notation pour les fibrés associés est sans lien avec celle des produits fibrés (ici on change la fibre, tandis que pour les produits fibrés, c'est l'espace de base qui est modifié).

À l'instar des fibrés vectoriels, il existe sur les fibrés principaux une notion de connexion. L'étude de l'espace de ces connexions sera un sujet central en théories de jauge.

Définition 2.6 (Connexion sur un fibré principal). — Soit $\pi : P \rightarrow M$ un G -fibré principal. Le sous-fibré vertical $V \subset TP$ est le fibré vectoriel constitué des vecteurs tangents aux fibres de π (i.e. $V = \ker d\pi$). Une connexion A sur π est la donnée d'un sous-fibré horizontal de TP tel que :

- i) les fibrés verticaux et horizontaux sont en somme directe : $V_p \oplus A_p = T_p P$.
- ii) le fibré horizontal est G -invariant : $(R_g)_* A_p = A_{p \cdot g}$, où R_g désigne la multiplication à droite dans G .

Remarque 2.7 . — On a également que $(R_g)_* V_p = V_{p \cdot g}$ et il est facile de construire un isomorphisme $\mathfrak{g} \simeq V_p$ pour chaque p ($\mathfrak{g}$ étant l'algèbre de Lie du groupe structural). Cet isomorphisme permet alors de construire une 1-forme sur P à valeur dans $\mathfrak{g}$, notée ω_A et appelée forme de connexion, en projetant un vecteur de $T_p P$ sur sa composante verticale.

Associée à une connexion, la courbure se définit alors comme sa dérivée, dans un sens que nous précisons maintenant. Étant donné une connexion A sur un fibré principal $\pi : P \rightarrow M$, on désigne par a la projection des vecteurs tangent sur leur composante horizontale (ou parallèle). À toute $(k-1)$ -forme η on peut alors appliquer l'opérateur $d_A \eta$ défini par $d_A \eta(v_1, \dots, v_k) = d\eta(a(v_1), \dots, a(v_k))$.

Définition 2.8 (Courbure d'une connexion). — La courbure d'une connexion A est la 2-forme $d_A(\omega_A)$, où ω_A est la forme de connexion de A .

Terminologie 2.9. — Considérons une représentation $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ et une connexion A sur $\pi : P \rightarrow M$. Une k -forme η à valeur dans V est dite de type ϱ , ce que l'on note $\eta \in A_\varrho^k(P; W)$, lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. la forme η est ϱ -équivariante, i.e. $R_g^* \eta = \varrho(g^{-1}) \circ \eta$.
2. la forme η s'annule sur tout vecteur vertical.

Remarquer que l'on définit ainsi un opérateur de de Rham $d_A : A_\varrho^k(P; W) \rightarrow A_\varrho^{k+1}(P; W)$.

Lemme 2.10. — La différence de deux formes de connexions est une 1-forme de type Ad , autrement dit l'espace $\mathcal{A}(P)$ des connexions peut être vu comme un espace affine d'espace directeur $A_{\mathrm{Ad}}^1(P; \mathfrak{g})$.

Un important résultat en théorie de jauge permet de construire une connexion sur les fibrés vectoriels associés à un fibré principal.

Théorème 2.11. — Il existe un isomorphisme canonique $A_\varrho^k(P; V) \cong A^k(M; P \times_\varrho V)$.

Démonstration. — Envoyer $\eta \in A_\varrho^k(P; V)$ sur $(v_1, \dots, v_k) \mapsto [p, \eta(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k)]$, où $\tilde{v}_i$ est un relevé arbitraire de v_i sur P . •

Remarque 2.12. — L'espace $\mathcal{A}(P)$ est donc un espace affine d'espace directeur $A^1(M; \mathrm{Ad}(P))$, où $\mathrm{Ad}(P) = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ est le fibré adjoint de P . La forme de courbure apparait alors comme un élément de $A^2(M; \mathrm{Ad}(P))$.

En suivant ces isomorphismes, la dérivée covariante sur le fibré $P \times_\varrho V$ s'obtient grâce à d_A :

$$\begin{array}{ccc} A_\varrho^0(P; V) & \xrightarrow{d_A} & A_\varrho^1(P; V) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ A^0(M; P \times_\varrho V) & \xrightarrow{\nabla_A} & A^1(M; P \times_\varrho V) \end{array}$$

Introduisons finalement le groupe de jauge d'un fibré principal.

Définition 2.13 (Groupe de jauge). — Un automorphisme d'un G -fibré principal $\pi : P \rightarrow M$ est une application lisse $f : P \rightarrow P$ préservant les fibres (i.e. $\pi \circ f = \pi$) et G -équivariante (i.e. $f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$).

L'ensemble des automorphismes de P forment un groupe $\mathcal{Aut}(P)$, appelée le groupe de jauge du fibré.

Remarque 2.14. — Plus généralement, étant donné $\varrho : G \rightarrow G'$ un homomorphisme de groupes de Lie, un morphisme de type ϱ entre un G -fibré principal $\pi : P \rightarrow M$ et un G' -fibré principal $\pi' : P' \rightarrow M$ est une application $f : P \rightarrow P'$ telle que $\pi' \circ f = \pi$ et

$f(p) \cdot \varrho(g) = f(p \cdot g)$. De ce point de vue, les isomorphismes de G -fibrés principaux sont les morphismes de type id_G .

2.2 Structures spinorielles et opérateur de Dirac

Pour décrire la théorie de Seiberg-Witten, nous devons également présenter les structures spinorielles, qui sont au cœur de la théorie.

Définition 2.15 (*Groupe Spin*). — Le groupe $\text{Spin}(n)$ est le revêtement à deux feuillets du groupe $\text{SO}(n)$. On définit aussi le groupe $\text{Spin}^c(n) = \text{Spin}(n) \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{S}^1$.

Remarque 2.16 . —

1. Pour $n \geq 3$ le groupe $\text{Spin}(n)$ est le revêtement universel de $\text{SO}(n)$. Le morphisme $\delta : \text{Spin}^c(n) \rightarrow \mathbb{S}^1$ est appelé le morphisme déterminant, tandis que $\varpi : \text{Spin}^c(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ est appelé l'épimorphisme canonique.
2. Pour ce qui nous intéresse, le groupe $\text{Spin}^c(4)$ s'identifie à $\{u = (u_+, u_-) \in \text{U}(2) \times \text{U}(2) \mid \det u_+ = \det u_-\}$. Le morphisme déterminant est donnée par $\delta(u) = \det u_+$, et l'épimorphisme canonique $\varpi : \text{Spin}^c(4) \rightarrow \text{SO}(\mathbb{H})$ par $\varpi(u)(f) = u_+ \circ f \circ u_-^{-1}$ (via $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}\text{SU}(2)$).

À l'instar des quaternions de Hamilton et le cas particulier de $\text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$, les groupes Spin peuvent être vu alternativement comme les groupes unitaires d'algèbres de Clifford. En dimension paire, on dispose alors de représentations importantes : les spineurs.

Considérons un espace euclidien V de dimension paire, et décomposons $V \otimes \mathbb{C} = W \oplus \overline{W}$ où W (*resp.* $\overline{W}$) est engendré par les $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2i-1} - ie_{2i})$ (*resp.* $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2i-1} + ie_{2i})$).

Définition 2.17 (*Spineurs*). — On appelle spineurs (positifs, *resp.* négatifs) les éléments de l'algèbre extérieure $\Sigma = \Lambda^* W$ ($\Sigma^+ = \Lambda^{\text{pair}} W$, *resp.* $\Sigma^- = \Lambda^{\text{impair}} W$).

Remarque 2.18 . — Dans le cas de la dimension 4, on peut montrer que les spineurs $\Sigma^\pm$ coïncident avec les deux projections $\varrho_\pm$ de $\text{Spin}^c(4)$ sur $\text{U}(2)$ livrées par la description que nous avons faite plus haut.

Le résultat important pour nous est le théorème suivant :

Théorème 2.19 . — Il existe un isomorphisme canonique entre l'algèbre des endomorphismes des spineurs et l'algèbre de Clifford complexe de V . En particulier, cet isomorphisme induit une représentation unitaire du groupe Spin, qui se décompose en deux sous-représentations irréductibles qui sont exactement les spineurs positifs et négatifs.

On considère à présent une variété riemannienne orientable M et sont $\text{SO}(n)$ -fibré principal P des repères orthonormaux, ou plus généralement un $\text{SO}(n)$ -fibré principal $\pi : P \rightarrow M$.

Définition 2.20 (*Structure spinorielle*). — Une structure spinorielle (complexe) sur un $\text{SO}(n)$ -fibré principal P sur une variété M est un $\text{Spin}^c(n)$ -fibré principal Q et un morphisme de $\tau : Q \rightarrow P$ de type ϖ .

Remarque 2.21 . —

1. Deux structures spinorielles $\tau : Q \rightarrow P$ et $\tau' : Q' \rightarrow P$ seront alors dites équivalentes lorsqu'il existe un morphisme $\varphi : Q \rightarrow Q'$ de type $\text{id}_{\text{Spin}^c}$ tel que $\tau' \circ \varphi = \tau$.
2. Par abus du langage on parlera de structure spinorielle sur une variété riemannienne M pour désigner une structure spinorielle sur le $\text{SO}(4)$ -fibré des repères orthonormaux de M .

Dans le cas des 4-variétés riemanniennes orientées (et plus largement les fibrés euclidiens orientés de rang 4), la caractérisation suivante des structures spinorielles sera utilisée dans toute la suite.

Théorème 2.22 . — Soit M une variété riemannienne orientée de dimension 4. Il est équivalent de se donner une structure spinorielle à équivalence près sur M et un quadruplet $(\Sigma^+, \Sigma^-, \nu, \lambda)$ constitué de :

- i) Deux $\text{U}(2)$ -fibrés vectoriels $\Sigma^\pm$.
- ii) Un isomorphisme unitaire $\nu : \Lambda^2(\Sigma^-) \rightarrow \Lambda^2(\Sigma^+)$.
- iii) Un isomorphisme linéaire $\gamma^- : TM \rightarrow \mathbf{R} \text{SU}(\Sigma^-, \Sigma^+)$ multipliant les normes par $\sqrt{2}$.

Remarque 2.23 . — Pour $v \in TM$, le morphisme $\gamma^-(v)$ se complète en $\gamma(v) : \Sigma \rightarrow \Sigma$ en posant

$$\gamma(v) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^+(v) \\ \gamma^-(v) & 0 \end{pmatrix}$$

où $\gamma^+(v) = -\gamma^-(v)^*$. Cette gymnastique permet d'obtenir pour TM une structure de module à gauche sur l'algèbre de Clifford. En particulier, on retiendra que TM agit sur Σ .

L'utilisation de structures spinorielles complexes sur nos variétés (plutôt que leurs homologues réelles) tient au fait que l'existence et la classification de telles structures ne souffre de (presque) aucune contrainte topologique :

Théorème 2.24 (Hirzebruch, Hopf) . — Toute variété riemannienne compacte orientée admet une structure spinorielle complexe. L'ensemble des classes d'équivalence de telles structures admet une structure de $\mathbf{H}^2(M)$ -torseur.

Introduisons le fibré déterminant $\delta(Q) = Q \times_{\delta} \mathbf{S}^1$ associé à une structure spinorielle $\tau : Q \rightarrow P$. Il est intéressant à ce stade de remarquer que la donnée d'une connexion sur Q est équivalent à la donnée d'une connexion sur $\delta(Q)$ et sur P . Autrement dit on dispose d'un isomorphisme canonique $\mathcal{A}(Q) \simeq \mathcal{A}(\delta(Q)) \times \mathcal{A}(P)$. Mais dans le cas des 4-variétés riemanniennes, le fibré P des repères orthonormaux bénéficie en l'espèce d'une connexion privilégiée, à savoir la connexion de torsion nulle, dite de Levi-Civita. Nous ne considérons donc plus que des connexions sur le fibré déterminant pour souligner ce choix dans la suite.

Nous allons décrire de nouveaux opérateurs, appelés opérateurs de Dirac, dont la vocation est de fournir des « racines carrées » d'un opérateur laplacien.

Définition 2.25 (*Opérateur de Dirac*). — Soit $A \in \mathcal{A}(\delta(Q))$ une connexion sur la structure spinorielle $\tau : Q \rightarrow P$, sur la variété riemannienne (M, g) . L'opérateur de Dirac est le morphisme composé :

$$A^0(\Sigma) \rightarrow A^1(\Sigma) \rightarrow A^0(\Sigma)$$

où la première flèche est donnée par la connexion sur le fibré (en utilisant un isomorphisme musical, *i.e.* la métrique de M), et le second par l'action évoquée en 2.23 .

Du point de vue analytique, les opérateurs de Dirac obtenus ne se comportent pas trop mal.

Lemme 2.26 . — Les opérateurs $\not{D}_A$, $\not{D}_A^2$ et $\not{D}_A^\pm$ sont des opérateurs elliptiques. En outre, $\not{D}_A$ est auto-adjoint.

Remarque 2.27 . — L'exemple le plus simple d'opérateur de Dirac est donné par $d + d^*$, où d^* désigne l'opérateur Hodge dual du cobord d . Dans ce cas le carré $(d + d^*)^2 = dd^* + d^*d$ est l'opérateur de Hodge-Laplace. Dans ce cas, il est possible de calculer par des méthodes analytiques l'indice de l'opérateur de Dirac (en utilisant en dernier recours le théorème de Hodge) : on trouve tombe alors sur la caractéristique d'Euler. En général, il faut recourir au théorème de l'indice de Atiyah-Singer pour obtenir cet indice.

Comme nous l'avons fait remarquer, les opérateurs de Dirac se comportent comme des racines carrées de laplacien : remarquer par exemple que le symbole associé à $\not{D}_A^2$ est le même que Δ_A . Ce fait est précisé par la formule de Weitzenböck :

Théorème 2.28 (*formule de Weitzenböck*). — Soit $\tau : Q \rightarrow P$ une structure spinorielle sur une variété riemannienne M de dimension 4 et $A \in \mathcal{A}(\delta(Q))$ une connexion du fibré déterminant. Alors

$$\not{D}_A^2 = \Delta_A + \frac{1}{4}(\gamma(\Omega_A) + s_g)$$

où s_g désigne la courbure scalaire de M .

3 LA THÉORIE DE SEIBERG-WITTEN

Nous présentons les éléments de la théorie de Seiberg-Witten qui nous serviront à établir le théorème de Donaldson. Nous allons d'abord décrire le groupe de jauge de la théorie, ainsi que les équations de Seiberg-Witten, qui nous permettront de former l'espace des modules comme le quotient des équations de Seiberg-Witten sous l'action du groupe de jauge. Nous pourrions alors démontrer la compacité de ce dernier. Toutefois, les espaces en jeu sont encore impropres à l'analyse, et il faudra les compléter au sens de Sobolev pour obtenir plus de résultats. Nous décrirons alors l'allure des voisinages des solutions et de leurs orbites, avant d'obtenir des résultats importants sur la topologie de l'espace des solutions.

3.1 Équations de Seiberg-Witten et espaces de modules

Considérons une variété riemannienne orientée compacte connexe (M, g) , et $\tau : Q \rightarrow P_g$ une Spin^c -structure sur M (où P_g désigne le fibré des repères orthonormaux sur M). Choisissons également une perturbation $\beta \in A^2(M)$. Les équations de Seiberg-Witten perturbées par β associées à τ s'écrivent

$$(A, \Psi) \in \mathcal{A} = \mathcal{A}(\delta(Q)) \times A^0(\Sigma^+(Q)), \quad \begin{cases} 0 &= \not{D}_A \Psi \\ 0 &= \gamma_+(F_A + 2i\pi\beta)^+ - (\Psi \otimes \bar{\Psi})_0 \end{cases} \quad (\text{SW}_\beta^\tau)$$

où l'indice 0 dénote la composante de trace nulle. L'ensemble des solutions de (SW_β^τ) est noté $\mathcal{A}^{\text{SW}_\beta^\tau}$. Le groupe de jauge de la théorie est le groupe $\mathcal{G} = \mathcal{A}_{U_{P_g}}(Q) = \{f \in \mathcal{A}_{U_{P_g}}(Q) \mid \tau \circ f = \tau\}$. Ce dernier s'identifie naturellement à $C^\infty(M; \mathbf{S}^1)$ et agit à droite par $(A, \Psi) \cdot f = (A + 2f^{-1}df, f^{-1}\Psi)$, laissant les équations de Seiberg-Witten invariantes.

Définition 3.1 (*Espace des modules*). — L'espace des modules de Seiberg-Witten associé à la Spin-structure τ et la perturbation β est défini comme

$$\mathcal{M}_\beta^\tau = \mathcal{A}^{\text{SW}_\beta^\tau} / \mathcal{G}$$

Une solution des équations (SW_β^τ) est dite irréductible lorsqu'elle est trivialement stabilisée par l'action du groupe de jauge. L'espace $[\mathcal{A}^*]^{\text{SW}_\beta^\tau}$ des solutions irréductibles engendre l'espace de module $[\mathcal{M}_\beta^\tau]^*$.

Remarque 3.2 . —

1. On montre qu'une solution est irréductible lorsque $\Psi = 0$.
2. La formule de Weitzenböck permet d'obtenir les solutions de (SW_β^τ) comme les zéros d'une fonctionnelle (la fonctionnelle de Seiberg-Witten). Dans la théorie de Donaldson, la fonctionnelle correspondante est la fonctionnelle de Yang-Mills, obtenue en intégrant les courbures des connexions sur M . L'avantage décisif de la théorie de Seiberg-Witten est, comme on va le voir, que nous n'aurons pas recours à un procédé de compactification de l'espace des modules.

3.2 Compacité de l'espace des modules

Avant de comprendre l'espace des modules $\mathcal{M}_\beta^\tau$, il est important de décrire la topologie de l'espace quotient $\mathcal{B} = \mathcal{A} / \mathcal{G}$. Nous y reviendrons par la suite, mais pour l'instant, remarquons seulement qu'il est Hausdorff :

Lemme 3.3 . — L'espace $\mathcal{B}$ est séparé.

Fixons une connexion $A_0 \in \mathcal{A}(L, h)$ d'un fibré hermitien en droites (L, h) sur une variété riemannienne (X, g) . On dit qu'une connexion $A_1 \in \mathcal{A}(L, h)$ est dans la jauge de Coulomb de A_0 lorsque $d^*(A_0 - A) = 0$.

Lemme 3.4 . — Toute connexion A est jauge-équivalente à une connexion dans la jauge de Coulomb de A_0 , autrement dit il existe une connexion A_1 telle que :

- i) les connexions A et A_1 sont équivalentes sous l'action du groupe de jauge $C^\infty(X, \mathbf{S}^1)$.
- ii) la connexion A_1 est dans la jauge de Coulomb de A_0 .

Le résultat précédent dispose même d'une forme d'unicité. On note $\mathcal{H}^1(X; \mathbf{Z})$ l'espace des 1-formes harmoniques obtenues en prenant l'image de $\mathbf{H}^1(X; \mathbf{Z})$ par les isomorphismes de de Rham puis de Hodge.

Lemme 3.5 . — L'espace des connexions dans la même jauge de Coulomb modulo le groupe de jauge est une orbite de l'action libre de $2\pi\mathcal{H}^1(X, \mathbf{Z}) \subset \mathcal{A}^1(X)$ sur $\mathcal{A}(L, h)$.

Avant de démontrer la compacité de l'espace des modules, nous devons faire appel à un dernier résultat. On introduit l'opérateur $d^+ : A^1(M) \rightarrow A^2(M) \rightarrow A_+^2(M)$ obtenu par composition de la différentielle et de la projection sur la partie auto-duale¹.

Lemme 3.6 . — Soit (M, g) une variété riemannienne, connexe, compacte, orientée. Le complexe

$$0 \rightarrow A^0(M) \xrightarrow{d} A^1(M) \xrightarrow{d^+} A_+^2(M) \rightarrow 0$$

est un complexe elliptique. En particulier l'opérateur $(d^+, d^*) : A^1(M) \rightarrow A^0(M) \oplus A_+^2(M)$ est elliptique, de noyau (isomorphe à) $\mathcal{H}^1(M)$ et de conoyau $\mathcal{H}_+^2 \oplus \mathbf{R}$.

Théorème 3.7 . — L'espace des modules $\mathcal{M}_\beta^\tau$ est compact.

Démonstration. — Nous allons montrer que l'espace des modules est l'image d'un compact par la projection $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Il faut donc trouver un espace $S \subset \mathcal{A}^{\text{SW}_\beta^\tau}$ qui intersecte l'ensemble des orbites de solutions de (SW_β^τ) .

Nous fixons pour cela une connexion A_0 du fibré hermitien $\delta(Q)$ (et donc de $\det(\sigma^+(Q))$) et une base $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{b_1(M)}$ de $\mathcal{H}^1(M)$, et nous désignons par $\Pi \subset \mathcal{H}^1(M)$ le parallélépipède d'arêtes $4\pi i\mathbf{e}_1, \dots, 4\pi i\mathbf{e}_{b_1(M)}$. On prend alors pour l'espace S l'ensemble des solutions (A, Ψ) de (SW_β^τ) dont la connexion A est dans la jauge de Coulomb de A_0 et la composante harmonique de $A - A_0$ est dans Π . Il résulte alors du Lemme 3.5 que S intersecte bien l'ensemble des orbites. L'espace S est donc fermé, puisqu'il peut être défini à partir des équations

$$\begin{cases} \not{D}_{A_0} \Psi &= -\frac{1}{2}\gamma(\alpha) \\ (d^+, d^*) &= \gamma_+^{-1}(\Psi \otimes \bar{\Psi})_0 - (F_{A_0} + 2\pi\beta)^+, 0 \\ \pi_{\mathcal{H}^1}(\alpha) &\in \Pi \end{cases}$$

avec $\alpha = A - A_0$, et à base dénombrable. Il suffit alors de montrer qu'une suite $(\alpha_n, \Psi_n)_n$ admet une sous-suite convergente. La démonstration repose sur un principe dit de «bootstrapping», et utilise successivement les résultats de multiplication de Sobolev et de régularité elliptiques. Nous ne les détaillerons pas ici. •

3.3 Complétion au sens de Sobolev

Les espaces en jeu sont en général des espaces de dimension infinie non complets : pour pouvoir faire de l'analyse, il faut commencer par décrire un procédé de complétion de ces espaces. Entre autre, cela permettra d'obtenir une structure de variété banachique sur l'espace $\mathcal{B}^*$ (plus précisément, sur son complété au sens de Sobolev).

On commence par compléter l'espace $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\delta(Q)) \times A^0(\Sigma^+(Q))$. Bien sûr, l'espace des applications lisses $A^0(\Sigma^+(Q))$ est complété par l'espace de Sobolev $A^0(\Sigma^+(Q))_k^\beta = L_k^\beta(\Lambda^0 \otimes \Sigma^+(Q))$. On complète de même l'ensemble des k -formes sur une variété compact à valeur

¹On désigne par là les 2-formes (pour les 4 variétés) satisfaisants $\eta = *\eta$.

dans un fibré vectoriel quelconque. Pour $\mathcal{A}(\delta(Q))$, et plus généralement $\mathcal{A}(P)$ pour un fibré principal P , on pose la relation d'équivalence sur le produit $\mathcal{A}(P) \times A^1(\text{Ad}(P))_k^\flat$ (où $\text{ad}(P)$ désigne toujours le fibré adjoint) définie par $(A, \alpha) \sim (B, \beta)$ ssi $\alpha - \beta \in A^1(\text{Ad}(P))$ et $A - B = \beta - \alpha$. L'ensemble des classes d'équivalences est alors noté $\mathcal{A}(P)_k^\flat$. On parle alors de l'ensemble des connexions de Sobolev.

La complétion du groupe de jauge est en général plus difficile, mais nous bénéficions dans le cadre de la théorie de Seiberg-Witten d'une propriété géométrique intéressante : puisque $\mathcal{G}$ s'identifie à $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{S}^1)$, on est tenté de définir $L_k^\flat(M; \mathbb{S}^1)$ comme sous-variété de $L_k^\flat(M; \mathbb{C})$. C'est possible grâce un théorème de multiplication, permettant d'obtenir une extension $S : L_k^\flat(M; \mathbb{C}) \times L_k^\flat(M; \mathbb{C}) \rightarrow L_k^\flat(M; \mathbb{R})$ de l'application $f \mapsto f\bar{f}$. On définit alors $L_k^\flat(M; \mathbb{S}^1)$ (et donc $\mathcal{G}_k^\flat$) par $S^{-1}(\{1\})$.

Nous passons au cas de l'espace des modules de Sobolev. La théorie L^2 des opérateurs elliptiques est en général plus commode à manipuler, nous nous restreindrons donc à des espaces de Sobolev de type $(2, k)$ dans la suite. En particulier, on introduit le complété

$$\mathcal{A}_k = \mathcal{A}(\delta(Q))_k^2 \times A^0(\Sigma^+(Q))_k^2$$

et $\mathcal{G}_{k+1} = \mathcal{G}_{k+1}^2$, qui agit analytiquement sur $\mathcal{A}_k$ à droite.

Les observations faites au niveau des paires irréductibles restent valables, et l'action $\mathcal{O}_p : \mathcal{G}_{k+1} \rightarrow [\mathcal{A}_k]^*$ sur la paire $p = (A, \Psi)$ donnée par $\mathcal{O}_p(f) = p \cdot f = (A + 2f^{-1}df, f^{-1}\Psi)$ admet une différentielle en $1 \in \mathcal{G}$ donnée par

$$\begin{aligned} d_p^0 : \iota A^0(M)_{k+1} &\rightarrow \iota A^1(M)_k \oplus A^0(\Sigma^+)_k \equiv T_p \mathcal{A}_k \\ \psi &\mapsto (2d\varphi, -\varphi\Psi) \end{aligned}$$

Cette différentielle admet un adjoint formel $[d_p^0]^*(a, \psi) = 2d^*a + \iota \text{Im} \langle \Psi, \psi \rangle$. Le critère d'orthogonalité suivant va nous permettre de « faire des tranches transversales » dans les orbites, au moins localement :

Lemme 3.8 . — On a une décomposition orthogonale $\text{im } d_p^0 \oplus^\perp \ker[d_p^0]^* = \iota A^1(M)_k \oplus A^0(\Sigma^+)_k$.

Choisissons $\varepsilon < 0$, et introduisons $S_p^\varepsilon = \{p + \alpha | d_p^0(\alpha) = 0, |\alpha| < \varepsilon\}$. On montre alors que lorsque ε est suffisamment petit, S_p^ε réalise une tranche locale des orbites de $\mathcal{G}_{k+1}$:

Lemme 3.9 . — Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'application $s_p^\varepsilon : S_p^\varepsilon \times \mathcal{G}_{k+1} \rightarrow [\mathcal{A}_k]^*$ définie par $s_p^\varepsilon(q, f) = q \cdot f$ réalise un difféomorphisme sur une sous-variété ouverte de $[\mathcal{A}_k]^*$.

Il est alors possible de décrire l'espace $[\mathcal{B}_k]^* = [\mathcal{A}_k]^* / \mathcal{G}_{k+1}$ à partir des S_p^ε , et de le munir alors d'une structure de variété banachique.

Théorème 3.10 . — L'espace $[\mathcal{B}_k]^*$ admet une structure de variété banachique (séparée), et la projection $\pi : [\mathcal{A}_k]^* \rightarrow [\mathcal{B}_k]^*$ est alors un $\mathcal{G}_{k+1}$ -fibré principal sur $[\mathcal{B}_k]^*$.

Le procédé de complétion décrit jusqu'alors ne doit pas introduire de nouvelles orbites, pour préserver l'espace de module des solutions de (SW_β^r) . Un résultat de régularité elliptique permet de nous en assurer :

Théorème 3.11 . — L'inclusion canonique $\mathcal{A}^* \hookrightarrow \mathcal{A}_k$ induit un homéomorphisme au niveau des espaces de modules $\mathcal{M}_\beta^\tau \rightarrow [\mathcal{M}_\beta^\tau]_k$.

3.4 Le complexe de déformation

Soit $p \in \mathcal{A}$ une paire. La différentielle d_p^0 mentionnée plus haut s'inscrit dans un complexe elliptique C_p , appelé complexe de déformation :

$$0 \rightarrow \iota A^0(M)_{k+1} \xrightarrow{d_p^0} \iota A^1(M)_k \oplus \iota A^0(\Sigma^+)_k \xrightarrow{d_p^1} \iota A^2(M)_{k-1} \oplus A^0(\Sigma^-)_{k-1} \rightarrow 0$$

où d_p^1 est la différentielle en $p = (A, \Psi)$ de l'application

$$\begin{aligned} sw_\beta^\tau : \quad \mathcal{A}_k &\rightarrow \quad \iota A^2(M)_{k-1} \oplus A^0(\Sigma^-)_{k-1} \\ (A, \Psi) &\mapsto (\gamma_+(F_A + 2i\pi\beta)^+ - (\Psi \otimes \bar{\Psi})_0, \not\partial_A \Psi) \end{aligned}$$

On s'intéresse à la cohomologie de ce complexe C_k (que nous réécrivons $0 \rightarrow C_k^0 \rightarrow C_k^1 \rightarrow C_k^2 \rightarrow 0$ pour simplifier les notations). Introduisons les opérateurs d_p^{pair} et d_p^{impair} associés au complexe. Il est important de remarquer que l'opérateur d_p^{pair} est elliptique, de même symbole que $\not\partial_A^+ \oplus (d^+, d^*)$, dont l'indice peut facilement être calculé grâce au théorème d'Atiyah-Singer. On note alors $\pm w_c = \text{ind } d_p^{(\text{im})\text{pair}}$.

Voyons $\mathcal{A}_k^* \rightarrow \mathcal{B}_k^*$ comme un $\mathcal{G}_{k+1}$ fibré principal (conformément au Théorème 3.10). Puisque sw_β^τ est $\mathcal{G}_{k+1}$ -invariante, elle définit une section de Fredholm² du fibré associé $\mathcal{A}_k^* \times_{\mathcal{G}_{k+1}} C_k^2$ sur la variété banachique $\mathcal{B}_k^*$. L'espace des modules irréductibles $[\mathcal{M}_\beta^\tau]_k^*$ apparaît alors comme le lieu d'annulation de cette section.

Théorème 3.12 . —

- i) L'espace tangent de Zariski de $[\mathcal{M}_\beta^\tau]$ en $[p]$ est $T_{[p]}[\mathcal{M}_\beta^\tau]^* \simeq \mathbf{H}^1(C_p)$. La dimension w_c de $T_{[p]}[\mathcal{M}_\beta^\tau]^*$ est alors appelée la dimension présumée de l'espace des modules.
- ii) La paire p est irréductible si et seulement si $\mathbf{H}^0(C_p) = 0$.
- iii) Un point de la section régulier si $\mathbf{H}^2(C_p) = 0$ et dans ce cas $[\mathcal{M}_\beta^\tau]$ est une sous variété de $\mathcal{B}^*$.

Remarque 3.13 . — Dans la suite, on notera en abrégé $\mathbf{H}_p^k$ la (co)homologie du complexe de déformation, et $\mathcal{H}_p^k$ sa version harmonique (via le théorème de Hodge).

3.5 Modèles locaux

Nous allons décrire l'espace des modules au voisinage d'une solution $p = (A, \Psi)$ de (SW_β^τ) . Nous la supposons irréductible dans un premier temps ; en reprenant les notations avancées en 3.3 et 3.4, on introduit le voisinage de $[p]$ dans $[\mathcal{M}_\beta^\tau]_k$ définit (pour ε assez petit, à homéomorphisme près) par $\mathcal{M}_p^\varepsilon = (sw_\beta^\tau)^{-1}_{|_{\mathcal{S}_p^\varepsilon}}(0)$. L'homéomorphisme est bien

²Pour s'en assurer, on utilise la paramétrisation locale vue en § 3.3 de $\mathcal{B}_k^*$, et le fait que la différentielle de sw_β^τ intervient explicitement dans le complexe de déformation.

entendu obtenu en identifiant l'orbite d'une solution et son unique représentant dans la tranche locale.

Puisque $sw_\beta^\tau(p) = 0$, on peut donc décrire (par translation) $\mathcal{M}_p^\varepsilon$ comme le lieu d'annulation du système d'équations

$$\begin{cases} d_p^0(q-p) &= 0 \\ sw_\beta^\tau(q) &= 0 \end{cases} \quad \text{pour } |p-q| \leq \varepsilon$$

Regardons plutôt $\mathcal{M}_p^\varepsilon$ comme le sous-espace d'un espace $\mathcal{N}_p^\varepsilon$ obtenu en affaiblissant la seconde équation (*sic!*), et en demandant seulement :

$$\begin{cases} d_p^0(d_p^0)^*(q-p) &= 0 \\ (d_p^1)^*sw_\beta^\tau(q) &= 0 \end{cases} \quad \text{pour } |p-q| \leq \varepsilon$$

Rappelons que, par définition, d_p^1 désigne la différentielle de sw_β^τ en p , et (toujours puisque $sw_\beta^\tau(p) = 0$) on a donc $sw_\beta^\tau(q) = d_p^1(q-p) + Q_p(q-p)$, où $Q : \iota\Lambda^1(M) \oplus \Sigma^+ \rightarrow \text{Herm}(\Sigma^+) \oplus A^0(\Sigma^+)$ est un opérateur bilinéaire symétrique d'ordre 0.

Remarque 3.14 . — En fait, la théorie générale des complexes elliptiques nous assure que les deux membres des équations précédentes appartiennent à des sous-espaces en somme directe, ce qui permet de réécrire plus simplement $\mathcal{N}_p^\varepsilon$ comme le lieu d'annulation de $\varphi_p : q-p \mapsto d_p^0(d_p^0)^*(q-p) + (d_p^1)^*sw_\beta^\tau(q)$.

Lemme 3.15 . — Pour ε suffisamment petit, l'application φ_p est une submersion en 0, donc $\mathcal{N}_p^\varepsilon$ est une sous-variété de $\mathcal{A}_{k-2}$. Son espace tangent est alors $T_p\mathcal{N}_p^\varepsilon = \ker(d_0\varphi_p) = \ker \Delta_p^1 = \mathcal{H}_p^1$.

On retrouve ensuite $\mathcal{M}_p^\varepsilon$ à partir de $\mathcal{N}_p^\varepsilon$ en cherchant les solutions de $sw_\beta^\tau(q) = 0$. En fait, la restriction de sw_β^τ à $\mathcal{N}_p^\varepsilon$ fournit des fonctions harmoniques du complexe de déformation. Plus précisément :

Lemme 3.16 . — La restriction $(sw_\beta^\tau)|_{\mathcal{N}_p^\varepsilon}$ est la projection sur l'espace de dimension finie $\mathcal{H}_p^2$ de la forme quadratique $Q : (sw_\beta^\tau)|_{\mathcal{N}_p^\varepsilon}(q) = \text{pr}_{\mathcal{H}_p^2}(Q_p(q-p))$.

Identifions à présent $\mathcal{N}_p^\varepsilon$ à son espace tangent $\mathcal{H}_p^1$ au point p , de sorte que $\mathcal{M}_p^\varepsilon$ apparaisse comme lieu d'annulation d'une application $\mathcal{H}_p^1 \rightarrow \mathcal{H}_p^2$. C'est possible au moyen de l'application de Kuranishi :

Théorème 3.17 . — Pour toute solution irréductible $p \in [\mathcal{N}^{\text{SW}_\beta^\tau}]^*$, il existe un voisinage U_p de 0 dans $\mathcal{H}_p^1$, un voisinage V_p de $[p]$ dans $[\mathcal{M}_\beta^\tau]^*$, et une application $\kappa_p : U_p \rightarrow \mathcal{H}_p^2$ telle que $\kappa_p(0) = 0$, $d_0\kappa_p = 0$ et qu'il existe un homéomorphisme $V_p \simeq \kappa_p^{-1}(0)$ envoyant $[p]$ sur 0.

Pour démontrer le théorème d'intersection de Donaldson, il sera crucial de décrire l'espace de modules autour d'une solution réductible : le même procédé peut être appliqué.

Soit $p = (A, 0)$ une solution réductible de (SW_β^r) . Nous pouvons toujours considérer la tranche S_p^ε (quand bien même elle ne fournit plus une paramétrisation locale de $\mathcal{B}_k$). Elle est en revanche $\mathbf{S}^1$ -invariante et le quotient $S_p^\varepsilon/\mathbf{S}^1$ est homéomorphe à un voisinage de $[p]$ dans $\mathcal{B}_k$. Nous pouvons alors utiliser la même méthode que plus haut pour obtenir

Théorème 3.18 . — Pour toute solution réductible $p = (A, 0) \in \mathcal{A}^{\text{SW}_\beta^r}$, il existe un voisinage U_p de 0 dans $\mathcal{H}_p^1$, un voisinage V_p de $[p]$ dans $\mathcal{M}_\beta^r$, et une application $\kappa_p : U_p \rightarrow \mathcal{H}_p^2$ telle que $\kappa_p(0) = 0$, $d_0\kappa_p = 0$ et qu'il existe un homéomorphisme $V_p \simeq \kappa_p^{-1}(0)/\mathbf{S}^1$ envoyant $[p]$ sur $[0]$.

3.6 Topologie de $\mathcal{B}^*$

Détaillons à présent la topologie de l'espace $\mathcal{B}^*$. Nous disposons d'une suite exacte courte scindée³

$$1 \rightarrow \mathbf{S}^1 \rightarrow G \rightarrow 2i\pi \mathbf{H}^1(M; \mathbf{Z}) \rightarrow 1$$

où $G = \{f \in C^\infty(M; \mathbf{S}^1) \mid d^*(f^{-1}df) = 0\}$, et où la projection est donnée par $f \mapsto f^{-1}df$. Fixons à nouveau une connexion A_0 . Nous avons vu que toute connexion était jauge équivalente à une connexion dans la jauge de Coulomb de A_0 , c'est-à-dire dans la tranche de Coulomb $A_0 + i \ker d^*$. Dans cette tranche, l'action du groupe de jauge $\mathcal{G}$ se réduit à celle du groupe G :

Théorème 3.19 . — Le plongement affine $i \ker d^* \hookrightarrow \mathcal{A}(\delta(Q))$ dans la tranche de Coulomb induit des homéomorphismes

$$\mathcal{B} \simeq \left(i \ker d^* \times A^0(\Sigma^+) \right) / G \quad \mathcal{B}^* \simeq \left(i \ker d^* \times (A^0(\Sigma^+) - \{0\}) \right) / G$$

où G agit par $(A, \Psi) \sim (A + 2f^{-1}df, f^{-1}\Psi)$.

Remarque 3.20 . — Le noyau de d^* admet une décomposition $\mathcal{H}^1(M) \oplus d^*(A^2(M))$, ce qui permet de réécrire $\mathcal{B}^* \simeq i d^*(A^2(M)) \times (i \mathcal{H}^1(M) \times (A^0(\Sigma^+) - \{0\})) / G$.

En suivant le scindage de G , nous étudions d'abord quotient par l'action de $\mathbf{S}^1$, puis $\mathbf{H}^1(M; \mathbf{Z})$. Déjà, l'espace $(A^0(\Sigma^+) - \{0\})/\mathbf{S}^1$ est homéomorphe au produit $\mathbf{R}_+^* \times P(A^0(\Sigma^+))$, où $P(A^0(\Sigma^+))$ est l'espace projectif (de dimension infinie) de $A^0(\Sigma^+)$.

Lemme 3.21 . — Il existe un homéomorphisme (dépendant d'une connexion $A_0 \in \mathcal{A}(\delta(Q))$ arbitrairement fixée)

$$\mathcal{B}^* \simeq i d^*(A^2(M)) \times \mathbf{R}_+^* \times \mathcal{P}$$

où $\mathcal{P}$ est un espace fibré sur le tore $\mathcal{J}(M) = i \mathcal{H}^1(M) / 4i\pi \mathcal{H}^1(M; \mathbf{Z})$ de fibre l'espace projectif $P(A^0(\Sigma^+))$. En particulier, $\mathcal{B}^*$ est homotopiquement équivalent à $\mathcal{P}$.

Remarque 3.22 . — Il existe un isomorphisme canonique de $\mathbf{H}^*(\mathcal{J}(M); \mathbf{Z})$ vers $\Lambda^*(\mathbf{H}_1(M; \mathbf{Z})/\text{Tors})$. En tirant en arrière ce morphisme le long du fibré $\mathcal{B}^*$, on obtient

³Non canoniquement, nous y reviendrons.

alors un nouveau morphisme $\mu : \Lambda^*(\mathbf{H}_1(M; \mathbf{Z})/\text{Tors}) \rightarrow \mathbf{H}^*(\mathcal{B}^*; \mathbf{Z})$. Ces derniers constituent une brique indispensable pour la construction des invariants de Seiberg-Witten.

En procédant à l'inverse, on peut étudier en premier le quotient par $\mathbf{H}^1(M; \mathbf{Z})$. En fait, le scindage de G mentionné plus haut n'est pas canonique : ce dernier est induit par le choix d'un point x_0 de M (considérer le morphisme d'évaluation $f \mapsto f(x_0)$, qui fournit une rétraction $G \rightarrow \mathbf{S}^1$, de noyau $G_{x_0} \simeq \mathbf{H}^1(M; \mathbf{Z})$). Un tel scindage permet alors de quotienter d'abord par G_{x_0} , et de voir $\mathcal{P}$ comme le quotient d'un espace fibré $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{I}(M)$ de fibre la sphère unité de $A^0(\Sigma^+)$ par l'action de $\mathbf{S}^1 \simeq G/G_{x_0}$. On obtient donc un $\mathbf{S}^1$ -fibré principal $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}$: notons $u \in \mathbf{H}^2(\mathcal{P}; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{H}^2(\mathcal{B}^*; \mathbf{Z})$ la classe de Chern du dual de ce fibré (une raison pour prendre le dual est que la restriction de u sur les fibres correspond aux classes canoniques des espaces projectifs associés).

Remarque 3.23 . — Il est alors possible d'étendre le morphisme μ cité plus haut en un isomorphisme $\mathbf{Z}[u] \otimes \Lambda^*(\mathbf{H}_1(M; \mathbf{Z})/\text{Tors}) \rightarrow \mathbf{H}^*(\mathcal{B}^*; \mathbf{Z})$, qui est canonique, au sens où il ne dépend pas du couple (A_0, x_0) .

4 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Revenons à la forme d'intersection q d'une 4-variété riemannienne compacte, connexe, orientée M . Nous supposons en outre que $b_+(M) = 0$, où $b_+(M)$ désigne la dimension maximale du sous-espace de $\mathbf{H}^2(M; \mathbf{R})$ sur lequel la forme d'intersection q_M est définie positive.

Définition 4.1 (classe caractéristique). — Une classe $c \in \mathbf{H}^2(M)$ est appelée caractéristique lorsque sa réduction modulo 2 est égale à la seconde classe de Stiefel-Whitney de M .

On montre facilement que vecteurs caractéristiques de q proviennent toujours de classes caractéristiques de M . Il suffit donc d'après le théorème d'Elkies de démontrer que pour toute classe caractéristique c de M (toujours avec $b_+(M) = 0$), on a l'inégalité $c^2 + b_2(M) \leq 0$.

Nous supposons pour simplifier que $b_1(M) = 0$. Sous cette hypothèse, on peut montrer que l'espace des solutions réductibles est en fait réduit à une seule orbite, à savoir $p_\beta = [A_\beta, 0]$ où A_β est une connexion de courbure $F_\beta = -2i\pi(h + \beta)$, où h est le représentant harmonique de la classe de Chern $c = c_1(\delta(Q))$ (via les isomorphismes de Hodge et de Rham). On va tenter de comprendre l'allure locale de l'espace des modules autour de p_β : avant cela, il nous faut comprendre la cohomologie du complexe de déformation. Les hypothèses adoptées permettent rapidement d'obtenir

$$\mathcal{H}_{p_\beta}^1 = \ker \mathcal{D}_{A_\beta}^+ \quad \mathcal{H}_{p_\beta}^2 = \ker \mathcal{D}_{A_\beta}^- \quad \text{ind } \mathcal{D}_{A_\beta}^+ = \frac{1}{8}(c^2 + b_2(M))$$

On raisonne alors par l'absurde en supposant que ce dernier indice $\iota = \dim \mathcal{H}_{p_\beta}^1 - \dim \mathcal{H}_{p_\beta}^2$ est strictement positif.

Grâce à des résultats de transversalité, on montre que dans une telle configuration, $\ker \mathcal{D}_{A_\beta}^- = 0$ pour tout β dans un ouvert dense de $B_{\text{dR}}^2(M)_I$. En utilisant les modèles locaux, on peut alors identifier un voisinage de $p_\beta \in \mathcal{M}_\beta^\tau$ à un ouvert $\mathbf{S}^1$ -invariant U_β dans $\mathcal{H}_{p_\beta}^1 = \ker \mathcal{D}_{A_\beta}^+$ (cf. 3.18, *id.* pour les notations).

Choisissons β de sorte que nous puissions à la fois obtenir une description raisonnable de m_β^τ au voisinage de la singularité p_β et en dehors sur $[m_\beta^\tau]^* = m_\beta^\tau - [p_\beta]$. Par exemple nous demandons que la boule fermée $B(0, \varepsilon)$ soit contenue dans l'ouvert U_β . Par excision on construit alors la variété orientée compacte $\mathcal{N} = m_\beta^\tau - \kappa_{p_\beta}(B(0, \varepsilon)/S^1)$ à bord $\partial\mathcal{N} = \kappa_{p_\beta}(S(0, \varepsilon)/S^1) \simeq \mathbb{C}P^{t-1}$. Rappelons que nous avons introduit une classe de cohomologie $u \in H^2(\mathcal{B}^*, \mathbb{Z})$ à la section précédente (en utilisant le fibré $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}$).

Lemme 4.2. — La restriction de la classe u au bord $\partial\mathcal{N}$ correspond à la classe canonique de l'espace projectif $\mathbb{C}P^{t-1}$.

Autrement dit, on a $\langle u^{t-1} | [\partial\mathcal{N}] \rangle = 1$, ce qui force la classe fondamentale de $\partial\mathcal{N}$ à être non nulle. La contradiction tient au fait que cette classe fondamentale est précisément le bord d'une triangulation de $\mathcal{N}$ (dans l'espace $\mathcal{B}^*$).

RÉFÉRENCES

- [Flo88] Andreas FLOER. « An Instanton-Invariant for 3-Manifolds ». In : *Communications in Mathematical Physics* 118 (1988), p. 215-240.
- [DK90] S. K. DONALDSON et P. B. KRONHEIMER. *The Geometry of Four-Manifolds*. Oxford University Press, sept. 1990. ISBN : 9780198535539. DOI : 10.1093/oso/9780198535539.001.0001.
- [AM10] Michèle AUDIN et Damian MIHAI. *Théorie de Morse et homologie de Floer*. Français. 1ère édition. Savoirs Actuels. EDP Sciences, août 2010, p. 562. ISBN : 9782759805181.
- [Tel12] Andrei TELEMEN. *Introduction à la théorie de jauge*. T. 18. Collection SMF / Cours spécialisés. Société Mathématique de France, 2012, p. 191. ISBN : 9782856293225.